

**Четвёртый тур 01.12.2024. Высшая лига, бой за 1 место.**

1. Окружность  $\omega$  касается окружности  $\omega_1$  в точке  $P$ . Прямая  $\ell$  отсекает на окружностях  $\omega$  и  $\omega_1$  равные хорды  $AB$  и  $A_1B_1$  (порядок точек  $A-B-B_1-A_1$ ). Прямые  $PA_1$  и  $PB_1$  повторно пересекают окружность  $\omega$  в точках  $A'$  и  $B'$ . Лучи  $AA'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что окружность  $(QA'B')$  пересекает окружность  $\omega_1$  в двух точках, причем их можно назвать  $X$  и  $Y$  так, что  $\angle APB = \angle AXA_1 - \angle BYB_1$ .

2. Вдоль бесконечной Волги через каждые 10 километров расположены причалы, один из них в Казани и один в Городце. Розалина начинает своё годовое путешествие по Волге в Казани. Каждый день она перемещается случайно на некоторое число километров, кратное 10, причём вероятность перемещения на  $10n$  километров в данном направлении (например, «на 30 километров по течению») всякий день одна и та же. Каждый раз, оказываясь в Казани (в том числе — в начале путешествия), Розалина ест эчпочмак, а оказываясь в Городце — пряник. Докажите, что математическое ожидание количества съеденных в течение года эчпочмаков не меньше, чем пряников. В году 365 дней.

3. В связном графе  $n \geq 4$  вершин и  $2n-4$  ребра. Докажите, что можно выбрать несколько (хотя бы одну) вершин, между которыми нет рёбер, и при выкидывании которых останется несвязный граф.

4. Докажите, что существуют такие целые числа  $k, m \geq 2024$ , что найдётся бесконечно много пар  $(a, b)$  нечётных натуральных чисел, для которых  $S_2(a) = k$ ,  $S_2(b) = m$  и  $S_2(ab) = 4$ . Здесь  $S_2(n)$  означает сумму цифр числа  $n$  в двоичной системе счисления.

5. На плоскости даны  $n \geq 4$  векторов, сумма длин которых равна 1. При каком наименьшем  $C$  из этих векторов всегда можно выбрать два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  таких, что  $|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{a} + \vec{b}| \leq C$ ? Ответ может зависеть от  $n$ .

6. Пусть  $n$  и  $k$  — натуральные числа. Назовем число  $d$  *хорошим*, если найдутся 2024 последовательные  $n$ -е степени натуральных чисел, дающие ровно  $k$  различных остатков при делении на  $d$ . При каких парах значений  $n$  и  $k$  количество хороших чисел бесконечно?

7. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $F$  и  $E$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $ABC$  и  $AEF$  пересекаются в точках  $A$  и  $X$ . Прямые  $AX$  и  $EF$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $W$  — середина дуги  $BAC$ . Точка  $R$  изогонально сопряжена точке  $A$  относительно треугольника  $EFW$ . Докажите, что  $PR \parallel BC$ .

8. Пусть  $A$  — множество всех квадратов целых чисел, а  $B$  — множество целых неотрицательных чисел, содержащее 0, и такое, что для любого натурального  $n$  количество решений уравнения  $n = a + b$ , где  $a \in A$  и  $b \in B$ , чётно. Докажите, что чётные элементы  $B$  — это в точности все удвоенные квадраты.

9. Докажите, что для любого натурального числа  $n$  существует натуральное число  $k$  такое, что число  $3^k + 5^k - 1$  делится на  $7^n$ .

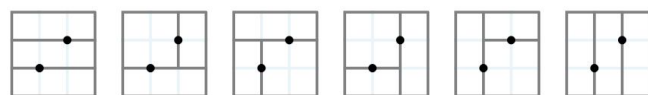
10. Найдите наименьшее вещественное  $\alpha$  такое, что для любого натурального  $n$  в белом клетчатом квадрате  $n \times n$  можно покрасить в чёрный не более  $\alpha n^2$  клеток так, чтобы из этого квадрата нельзя было вырезать никакое белое тетрамино (то есть связную по сторонам четырёхклеточную фигуру).

**Четвёртый тур 01.12.2024. Высшая лига, бои за 3–7 места; первая лига, бой на 1 место.**

1. Окружность  $\omega$  касается окружности  $\omega_1$  в точке  $P$ . Прямая  $\ell$  высекает на окружностях  $\omega$  и  $\omega_1$  равные хорды  $AB$  и  $A_1B_1$  (порядок точек  $A - B - B_1 - A_1$ ). Прямые  $PA_1$  и  $PB_1$  повторно пересекают окружность  $\omega$  в точках  $A'$  и  $B'$ . Лучи  $AA'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что окружность  $(QA'B')$  пересекает окружность  $\omega_1$  в двух точках, причем их можно назвать  $X$  и  $Y$  так, что  $\angle APB = \angle AXA_1 - \angle BYB_1$ .

2. Дима и Саша занимаются двумя на первый взгляд совершенно разными делами. У Димы есть фигура «хромой король» — она умеет ходить на 1 клетку вверх или вправо, а также на 1 клетку по диагонали вправо-вверх. Пусть  $A$  — количество путей хромого короля по доске  $n \times n$  из левого нижнего угла в правый верхний, которые никогда не поднимаются выше главной диагонали.

А у Саши есть бумажный клетчатый квадрат  $n \times n$  и резак, которым он может проводить горизонтальные или вертикальные разрезы «от края до края». Саша отметил  $n - 1$  узлов клеток, лежащих внутри квадрата на его главной диагонали, и каждый очередной разрез делает по одному из отмеченных узлов, по которому еще разрез не проводился (разрез проводится от края до края того куса бумаги, на котором расположен выбранный на данном ходу узел). Пусть  $B$  — количество способов так разрезать квадрат (способы, отличающиеся лишь порядком разрезов, считаются одинаковыми). Докажите, что  $A = B$ . (На рисунках изображены примеры всевозможных способов при  $n = 3$ .)



3. Дано натуральное число  $n \geq 10$ . Дан связный плоский граф на  $n$  вершинах с  $3n - 6$  рёбрами. Докажите, что нельзя выбрать несколько его вершин так, чтобы не было бы цикла, проходящего только по выбранным вершинам, а при удалении их из графа получался бы несвязный граф. (Под *плоским графом* будем иметь в виду набор отмеченных точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и набор отрезков, соединяющих пары этих точек, причём отрезки не пересекаются в неотмеченных точках.)

4. Докажите, что существуют такие целые числа  $k, m \geq 2024$ , что найдётся бесконечно много пар  $(a, b)$  нечётных натуральных чисел, для которых  $S_2(a) = k$ ,  $S_2(b) = m$  и  $S_2(ab) = 4$ . Здесь  $S_2(n)$  означает сумму цифр числа  $n$  в двоичной системе счисления.

5. На плоскости даны  $n \geq 4$  векторов, сумма длин которых равна 1. При каком наименьшем  $C$  из этих векторов всегда можно выбрать два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  таких, что  $|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{a} + \vec{b}| \leq C$ ? Ответ может зависеть от  $n$ .

6. Пусть  $n$  и  $k$  — натуральные числа. Назовем число  $d$  *хорошим*, если найдутся 2024 последовательные  $2n$ -е степени натуральных чисел, дающие ровно  $k$  различных остатков при делении на  $d$ . При каких парах значений  $n$  и  $k$  количество хороших чисел бесконечно?

7. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $F$  и  $E$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $ABC$  и  $AEF$  пересекаются в точках  $A$  и  $X$ . Прямые  $AX$  и  $EF$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $W$  — середина дуги  $BAC$ . Точка  $R$  изогонально сопряжена точке  $A$  относительно треугольника  $EFW$ . Докажите, что  $PR \parallel BC$ .

8. Найдите все вещественные числа  $a$ , для которых найдётся функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$f(x + y) + xf(f(y)) = f(f(x)) + f(y) + axy$$

для всех  $x, y \in \mathbb{R}$ .

9. Докажите, что для любого натурального числа  $n$  существует натуральное число  $k$  такое, что число  $3^k + 5^k - 1$  делится на  $7^n$ .

10. Найдите наименьшее вещественное  $\alpha$  такое, что для любого натурального  $n$  в белом клетчатом квадрате  $n \times n$  можно покрасить в чёрный не более  $\alpha n^2$  клеток так, чтобы из этого квадрата нельзя было вырезать никакое белое тетрамино (то есть связную по сторонам четырёхклеточную фигурку).

**Четвёртый тур 01.12.2024. Первая лига, бои за 3–7 места.**

1. Окружность  $\omega$  касается окружности  $\omega_1$  в точке  $P$ . Прямая  $\ell$  высекает на окружностях  $\omega$  и  $\omega_1$  равные хорды  $AB$  и  $A_1B_1$  (порядок точек  $A - B - B_1 - A_1$ ). Прямые  $PA_1$  и  $PB_1$  повторно пересекают окружность  $\omega$  в точках  $A'$  и  $B'$ . Лучи  $AA'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что окружность  $(QA'B')$  пересекает окружность  $\omega_1$  в двух точках, причем их можно назвать  $X$  и  $Y$  так, что  $\angle APB = \angle AXA_1 - \angle BYB_1$ .

2. Вдоль бесконечной Волги через каждые 10 километров расположены причалы, один из них в Казани и один в Городце. Розалина начинает своё годовое путешествие по Волге в Казани. Каждый день она перемещается случайно на некоторое число километров, кратное 10, причём вероятность перемещения на  $10n$  километров в данном направлении (например, «на 30 километров по течению») всякий день одна и та же. Каждый раз, оказываясь в Казани (в том числе — в начале путешествия), Розалина ест эчпочмак, а оказываясь в Городце — пряник. Докажите, что математическое ожидание количества съеденных в течение года эчпочмаков не меньше, чем пряников. В году 365 дней.

3. Дано натуральное число  $n \geq 10$ . Дан связный плоский граф на  $n$  вершинах с не более чем  $3n - 7$  рёбрами. Докажите, что можно выбрать несколько его вершин так, чтобы не было цикла, проходящего только по выбранным вершинам, а при удалении их из графа получался несвязный граф. (Под *плоским графом* будем иметь в виду набор отмеченных точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и набор отрезков, соединяющих пары этих точек, причём отрезки не пересекаются в неотмеченных точках.)

4. Докажите, что существуют такие целые числа  $k, m \geq 2024$ , что найдётся бесконечно много пар  $(a, b)$  нечётных натуральных чисел, для которых  $S_2(a) = k$ ,  $S_2(b) = m$  и  $S_2(ab) = 4$ . Здесь  $S_2(n)$  означает сумму цифр числа  $n$  в двоичной системе счисления.

5. На плоскости даны  $n \geq 4$  векторов, сумма длин которых равна 1. При каком наименьшем  $C$  из этих векторов всегда можно выбрать два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  таких, что  $|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{a} + \vec{b}| \leq C$ ? Ответ может зависеть от  $n$ .

6. Пусть  $n$  и  $k$  — натуральные числа. Назовем число  $d$  *хорошим*, если найдутся 2024 последовательные  $2n$ -е степени натуральных чисел, дающие ровно  $k$  различных остатков при делении на  $d$ . При каких парах значений  $n$  и  $k$  количество хороших чисел бесконечно?

7. Пусть  $BD$  и  $CE$  — биссектрисы в треугольнике  $ABC$ . Прямая  $DE$  пересекает внешние биссектрисы углов  $B$  и  $C$  в точках  $F$  и  $G$  соответственно. Пусть  $DEP$  и  $FGQ$  — правильные треугольники, лежащие по разные стороны от прямой  $DE$ . Докажите, что их описанные окружности касаются.

8. Найдите все вещественные числа  $a$ , для которых найдётся функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$f(x+y) + xf(f(y)) = f(f(x)) + f(y) + axy$$

для всех  $x, y \in \mathbb{R}$ .

9. Докажите, что для любого натурального числа  $n$  существует натуральное число  $k$  такое, что число  $3^k + 5^k - 1$  делится на  $7^n$ .

10. Можно ли все диагонали какого-нибудь выпуклого 100-угольника покрыть 94 треугольниками с вершинами в его вершинах? Диагональ считается покрытой, если каждая её точка лежит внутри или на границе хотя бы одного из 94 треугольников.